1168. 群ノ一例

岩澤　健吉（東大）

「前書：小生ノ拙話ニツキ岩澤氏カラモット良イ例ヲ教示サレマシタノデ，ソノ書簡ヲ転載サセテイタダキマス。

（中山）」

先日オ伺致シマシタ。

“各 Element ノ order ガ bounded デ直積非分解且ツ order ガイクラデモ大キイ群ノ例”

次ノ様ナモノヲ考ヘマシタ。勿論中山サンノト大同小異デスガ，$p>2$ ヲ素数トシ $\mathfrak{A}$ ヲ type $(p^2, p^2, \cdots\cdots p^2)$ ナル p^{2n} 次ノ Abel 群トシマス。B ハ $B^p=1$ ナル Element デ

$$BAB^{-1}=A^{1+p}, \quad \text{all} \quad A\in\mathfrak{A}$$

ニヨリ $\mathfrak{A}$ ヲ B デ拡大シテ order p^{2n+1} ノ群 $\mathfrak{G}$ ヲツクリマス。$\mathfrak{G}$ ノ任意ノ元ヲ

$$AB^k, \quad A\in\mathfrak{A}$$

トスレバ

$$(AB^k)^p = A^{(1+(1+p)^k+\cdots\cdots+(1+p)^{k(p-1)})}$$

$$1+(1+p)^k+\cdots\cdots+(1+p)^{k(p-1)}\equiv p, \quad \mathrm{mod}\ p^2$$

カラ

$$(AB^k)^p = A^p \qquad (1)$$

故ニ　$(AB^k)^{p^2}=A^{p^2}=1$

即チ $\mathfrak{G}$ ノ元ノ order ハ凡テ高々 p^2. 又 (1) カラ AB^b ノ order ガ $\leqq p$ ナルタメニハ $A^p=1$ ナルコトガ必要十分デアリマス。$\mathfrak{A}$ ニ於テ $A^p=1$ ナル A ノ全体ヲ $\mathfrak{A}_p$ トスレバ $\{B, \mathfrak{A}_p\}$ ハ order p^{n+1} 次ノ Abel 群デアルガ $\mathfrak{G}$ ニ於テ order $\leqq p$ ナル Element ノ全体トナリマス。

サテ $\mathfrak{G}$ ガ直積ニ分解サレタトシテ

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2.$$

トシ，特ニ

$$B = B_1 \cdot B_2 \qquad B_i \in \mathfrak{g}_i$$

トシマス。$B^p = 1$ カラ $B_1^p = 1$, $B_2^p = 1$ (直積ナル故)

ヨッテ $B_1 = B^{c_1} A_1$, $B_2 = B^{c_2} A_2$

$$0 \leqq c_1 < p, \quad 0 \leqq c_2 < p, \quad A_1, A_2 \in \mathfrak{A}_p$$

$B = B_1 B_2$ ナル故 c_1 又ハ c_2 ガ $\neq 0$. ヨッテ $c_1 \neq 0$ ト仮定シマス。

サテ任意ノ $A \in \mathfrak{A}$ ニ対シ

$$B_1 A B_1^{-1} A^{-1} = B^{c_1} A B^{-c_1} A = A^{(1+p)^{c_1}-1} = A^{c_1 p}$$

$c_1 \neq 0\ (p)$ ナル故 A ガ $\mathfrak{A}$ ヲ動ケバ $B_1 A B_1^{-1} A^{-1}$ ハ $\mathfrak{A}_p$ 全体ヲ動ク。$B_1 \in \mathfrak{g}_1$ デ $\mathfrak{g}_1$ ハ Normalteiler デスカラ

$$B_1 A B_1^{-1} A^{-1} \in \mathfrak{g}_1, \qquad \mathfrak{A}_p \subseteq \mathfrak{g}_1,$$

ヨッテ特ニ $A_1 \in \mathfrak{g}_1$

故ニ $B_1 \in \mathfrak{g}_1$ カラ $B^{c_1} \in \mathfrak{g}_1$, $B \in \mathfrak{g}_1$

即チ $\{\mathfrak{A}_p, B\} \subseteq \mathfrak{g}_1$

即チ $\mathfrak{G}$ ニ於テ order $\leq p$ ナル Element ハ凡テ $\mathfrak{G}_1$ ニ含マレルコトニナリマスカラ $\mathfrak{G}_2=1$. ヨッテ $\mathfrak{G}$ ハ直積非分解。

全体ノ群 $\mathfrak{G}$ ノ各 Element ノ order ガ $\leq p$ (即チ $A^p=1$) ノ場合モ，モウ少シ複雑ナ群ヲトレバ出来ルト思ヒマス。又 $\mathfrak{G}$ ガ p-群デアルコトヲ要求シナケレバ上ト同様ナ方法デ $\mathfrak{A}$ ハソノママ，唯 $B^q=1$, $q/p-1$, $BAB^{-1}=A^\alpha$, $\alpha^q\equiv 1 \bmod p$. トシテ $\mathfrak{G}$ ガ得ラレマス。(直積非分解ノ証明ハコノ方ガ簡単)　　(以下略)